Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2023 - 2024

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Θανάσης Νικολόπουλος
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
4ο Διαγώνισμα
Ύλη: Έως Θεώρημα Rolle

23-12-2023

Θέμα Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f:

α) είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

β) δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 4+3

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\cdot 1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|-x\right)\overset{x>0}{=}\lim_{x\to\infty}(x-x)=\lim_{x\to+\infty}0=0.$$

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1=x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

γ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

ε) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 ,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0 .

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha}{x}, & x\le -1\\ x^2+2, & x>-1\end{cases}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρεθεί ο αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής . μονάδες 7

Έστω ότι $\alpha=2$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-\dfrac{4}{3},3\right]$.

μονάδες 6

Β3. Να βρεθούν τα σημεία τις γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία (η) : $2y-x=2023$ και να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε) στα σημεία αυτά.

μονάδες 6

Β4. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο κ για τον οποίο η εξίσωση $f(x)=x^{2024}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\kappa,\kappa+1)$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)=x^3+\ln x+\sqrt{x}-2$ για κάθε $x>0$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης και το πρόσημό της.

μονάδες 4+3

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+\ln x+\sqrt{x}-2}, & x\geq 1\\ -\sqrt[3]{2-x^3-\ln x-\sqrt{x}}, & x\in(0,1)\end{cases}$.

μονάδες 3

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu\dfrac{\sqrt{2x}-3}{\sqrt{x}-1}+2024}{f^2(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x}\dfrac{1}{f(x)}\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu\left(f^3(x)-\ln x-\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$

μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, την οποία και να βρείτε.

μονάδες 6

Δ2. $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Δ3. η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^{x-1}+1$.

μονάδες 5

Δ4. η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2x-x^2$ μόνο στα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

μονάδες 7

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.α) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

β) Στο $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to \alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. Στο όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}-x\right)$ εφαρμόζονται ιδιότητες ορίων που δεν ισχύουν γιατί είναι απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$.

($\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}=+\infty$)

Επιπλέον είναι λάθος, όταν υπολογίζουμε ένα όριο, να υπολογίζουμε το όριο κάποιων από τους όρους της παράστασης και να το αντικαθιστούμε σε αυτήν, χωρίς να υπολογίζουμε το όριο ολόκληρης της παράστασης. Συνεπώς δεν μπορούμε να γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\cdot 1}-x\right).$$

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ δ) Σ

Θέμα Β

Β1. Για $x<-1$ η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι συνεχής και για $x=-1$ οπότε
Για $x>-1$η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της όταν είναι συνεχής και στο x = 1, δηλαδή:
$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)=1+\alpha$. $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^2+2\right)=3$ και $f(-1)=1-\frac{\alpha}{-1}=1+\alpha$.

Άρα $1+\alpha=3\Rightarrow\alpha=2$.

Β2. Για $\boldsymbol{\alpha=2}$: $f(x)=\begin{cases}1-\frac{2}{x}, & x\le -1\\ x^2+2, & x>-1\end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο $\left[-\frac{4}{3},3\right]$.

Για $-\frac{4}{3}<x<-1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)'=\frac{2}{x^2}$.

Για $-1<x<3$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(x^2+2\right)'=2x$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη για $x=-1$.

Για $x<-1$: $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{1-\frac{2}{x}-3}{x+1}=\frac{\frac{-2x-2}{x}}{x+1}=\frac{-2(x+1)}{x(x+1)}=-\frac{2}{x}$,

Άρα : $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-\frac{2}{x}\right)=2$.

Για $x>-1$: $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x^2+2-3}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$,

Άρα : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x=-1$, συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{4}{3},3\right)$, άρα δεν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματοςRolle.

Β3. Έστω σημεία $M(x_0,f(x_0))$ επαφής της γραφικής παράστασης της f με την εφαπτομένη της. Η εφαπτομένη ευθεία (ε) είναι παράλληλη με την (η) : $2y-x=2023\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{2023}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon=\frac{1}{2}$. Άρα αναζητώ κάποια x_0 ώστε $f'(x_0)=\frac{1}{2}$.

Για $x<-1$: $f'(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{{x_o}^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow {x_0}^2=4$, άρα $x_0=\pm 2$ και αφού $x_0<-1$, έχουμε $x_0=-2$.

Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=-2$ έχει εξίσωση:

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-2=\frac{1}{2}(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+3$

Για $x>-1$: $f'(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow x_0=\frac{1}{4}$, δεκτή.

Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=\frac{1}{4}$ έχει εξίσωση:

$y-f\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{4}\right)(x-\frac{1}{4})\Leftrightarrow y-\frac{33}{16}=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{31}{16}$

Β4. Αφού αναζητάμε θετικό ακέραιο α τότε για να ορίζεται η εξίσωση στο $(\kappa,\kappa+1)$ θα εργαστούμε με την f του δεύτερου κλάδου, δηλαδή $f(x)=x^2+2$.

$f(x)=x^{2024}\Leftrightarrow x^2+2=x^{2024}\Leftrightarrow x^{2024}-x^2-2=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^{2024}-x^2-2$.

Είναι $g(1)=1^{2024}-1-2=-2<0$, $g(2)=2^{2024}-4-2>0$, δηλαδή $g(1)g(2)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x^{2024}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Επομένως $\kappa=1$.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3$ (1), $x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2$ (2) ,

$x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1}-2<\sqrt{x_2}-2$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) προκύπτει
$f^3(x_1) < f^3(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.
Είναι $f^3(1) = 1^3 + \ln 1 + \sqrt{1} - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$, συνεπώς:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x = 1$,
$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$ και
$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \overset{x\in(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x \in (0,1)$.

Γ2. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f^3(x) = x^3 + \ln x + \sqrt{x} - 2 \geq 0$, άρα $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \ln x + \sqrt{x} - 2},\ x \geq 1$.
Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f^3(x) = x^3 + \ln x + \sqrt{x} - 2 < 0$, άρα $f(x) = -\sqrt[3]{-x^3 - \ln x - \sqrt{x} + 2},\ x \in (0,1)$.
Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + \ln x + \sqrt{x} - 2}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{2 - x^3 - \ln x - \sqrt{x}}, & x \in (0,1) \end{cases}$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + \ln x + \sqrt{x} - 2} = +\infty$.

Γ4.α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu \dfrac{\sqrt{2x} - 3}{\sqrt{x} - 1} + 2024}{f^2(x)} = +\infty$ γιατί κοντά στο 1 είναι $f^2(x) > 0$ και

$$-1 \leq \eta\mu \frac{\sqrt{2x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \leq 1 \Leftrightarrow 2023 \leq \eta\mu \frac{\sqrt{2x} - 3}{\sqrt{x} - 1} + 2024 \leq 2025 \Leftrightarrow \frac{2023}{f^2(x)} \leq \frac{\eta\mu \dfrac{\sqrt{2x} - 3}{\sqrt{x} - 1} + 2024}{f^2(x)} \leq \frac{2025}{f^2(x)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ με $f^2(x) > 0$ κοντά στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2023}{f^2(x)} = +\infty$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu \dfrac{\sqrt{2x} - 3}{\sqrt{x} - 1} + 2024}{f^2(x)} = +\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\eta\mu \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x} \dfrac{1}{f(x)} \right] = 0$ γιατί

$\left| \eta\mu \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x} \dfrac{1}{f(x)} \right| \leq \left| \eta\mu \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x} \right| \left| \dfrac{1}{f(x)} \right| \leq \left| \dfrac{1}{f(x)} \right|$ άρα $-\left| \dfrac{1}{f(x)} \right| \leq \eta\mu \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x} \dfrac{1}{f(x)} \leq \left| \dfrac{1}{f(x)} \right|$, με

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\left| \dfrac{1}{f(x)} \right| = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \left| \dfrac{1}{f(x)} \right|$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\eta\mu \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x} \dfrac{1}{f(x)} \right] = 0$

γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(f^3(x) - \ln x - \sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{\eta\mu(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \right] = \lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{\eta\mu(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)} (x^2 + x + 1) \right] = 3$

γιατί $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3$ και για $\omega = x^3 - 1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1} \omega = \lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 1) = 0$ άρα $\omega \to 0$ και

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)} = \lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$.

Θέμα Δ

Δ1. Παρατηρούμε ότι $f(0)=(0-1)e^0+1=-1+1=0$.
Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f.
Έστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα $\rho>0$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,\rho]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ με
$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x(1+x-1)=xe^x$.
Είναι $f(0)=f(\rho)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ τέτοιο, ώστε
$f'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi e^{\xi}=0\Leftrightarrow \xi=0$ άτοπο.
Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\rho<0$, οπότε η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Δ2. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Είναι $f(-1)=(-1-1)e^{-1}+1=-\frac{2}{e}+1=\frac{-2+e}{e}>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Είναι $f(1)=(1-1)e^1+1=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Τελικά $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Είναι $f(1)=1$ και $f'(1)=1\cdot e^1=e$.
Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση
ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=ex-e\Leftrightarrow y=ex-e+1$
Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ε εφάπτεται της C_g. Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ε.
Είναι $g'(x)=\left(e^{x-1}+1\right)'=e^{x-1}$, οπότε $g'(x)=\lambda_{\varepsilon}\Leftrightarrow e^{x-1}=e\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$.
Είναι $g(2)=e^{2-1}+1=e+1$ και η εφαπτομένη της C_g στο $x=2$ έχει εξίσωση
$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-(e+1)=e(x-2)\Leftrightarrow y=ex-2e+e+1\Leftrightarrow y=ex-e+1$, άρα είναι η ε.

Δ4. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=2x-x^2$ να έχει μοναδικές ρίζες τις $x=0$ και $x=1$.
Αρχικά, είναι $f(0)=0=2\cdot 0-0^2$ και $f(1)=1=2\cdot 1-1^1$ άρα πράγματι $x=0$ και $x=1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=2x-x^2$.
Επειδή για $x<0$ ή $x>2$ είναι $f(x)>0$ και $2x-x^2=x(2-x)<0$, η εξίσωση $f(x)=2x-x^2$ δεν έχει λύση στο $(-\infty,0)$ και στο $(2,+\infty)$.
Έστω ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-2x+x^2$ έχει 3 ρίζες, τις $x=0$, $x=1$ και 1 ακόμη ρίζα τη ρ.
Έστω $\rho\in(1,2]$.
Η φ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,\rho]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(0,1)$, $(1,\rho)$ με $\varphi'(x)=f'(x)-2+2x=xe^x-2+2x$.
Είναι $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(\rho)$, οπότε εφαρμόζεται για τη φ το θεώρημα Rolle στα $[0,1]$, $[1,\rho]$, άρα υπάρχουν $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(1,\rho)$ τέτοια, ώστε $\varphi'(x_1)=0$ και $\varphi'(x_2)=0$.
Η φ΄ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με
$\varphi''(x)=e^x+xe^x+2=e^x(x+1)+2$. Επειδή $\varphi'(x_1)=\varphi'(x_2)$, εφαρμόζεται για την φ ΄ το θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi''(\xi)=0$.
Όμως για κάθε $x>0$ είναι $\varphi''(x)=e^x(x+1)+2>0$, οπότε η εξίσωση $\varphi''(\xi)=0$ είναι αδύνατη.

Όμοια προκύπτει άτοπο αν $\rho \in (0,1)$.

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2x-x^2$ δεν έχει 3 ρίζες άρα οι x = 0 και x = 1 είναι οι μοναδικές της ρίζες.